

Лекция 9.
Приближенные методы вычисления.
1. Методы нахождения корней уравнения $f(x)=0$.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ уравнение

$$(9.1) \quad x = F(x).$$

Определение 1. Последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ будем называть *итерационной*, если x_0 - произвольная точка из области определения функции $F(x)$, $x_n = F(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ (при естественном условии, что все точки x_n также принадлежат области определения функции $F(x)$).

Лемма 1. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, точки x_n принадлежат отрезку $[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$, причем последовательность $\{x_n\}$ является итерационной. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, то $c = F(c)$.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, тогда $c \in [a, b]$. Значит, функция $F(x)$ непрерывна в точке c , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n-1}) = F(c)$. С другой стороны, $x_n = F(x_{n-1})$, отсюда $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n-1}) = F(c)$. Лемма 1 доказана.

Метод хорд.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет следующим условиям: $f(a) \cdot f(b) < 0$; $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$; производная $f'(x)$ монотонна и не меняет знак на $[a, b]$ (то есть, возможны 4 варианта: а) $f'(x) > 0$ и не убывает; б) $f'(x) < 0$ и не возрастает; в) $f'(x) > 0$ и не возрастает; г) $f'(x) < 0$ и не убывает. Будем для определенности рассматривать сначала случай а). Тогда $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$).

$$\text{Рассмотрим функцию } F(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}, & a \leq x < b \\ b - \frac{f(b)}{f'(b)}, & x = b \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и уравнение (9.1) эквивалентно на отрезке $[a, b]$ уравнению

$$(9.2) \quad f(x) = 0.$$

Построим следующую итерационную последовательность: $x_0 = a$, $x_n = F(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что эта последовательность сходится к корню уравнения (9.2)

Теорема 1. Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, причем $c \in [a, b]$, $f(c) = 0$.

Доказательство. Докажем по индукции, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом $c \in [a, b]$ таким, что $f(c) = 0$ (такое число существует, так как функция, непрерывная на отрезке и имеющая на его концах разные знаки, обращается в 0 хотя бы в одной точке этого отрезка).

$x_0 = a \in [a, c]$. Пусть $x_n \in [a, c]$. Докажем, что $x_{n+1} \in [a, c]$.

Если $x_n = c$, то $x_{n+1} = F(x_n) = F(c) = c$ (так как $f(c) = 0$). Пусть $a \leq x_n < c$. Тогда $x_{n+1} = F(x_n) =$

$$= x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = x_n + \frac{(b - x_n)(f(c) - f(x_n))}{f(b) - f(x_n)} = x_n + \frac{(b - x_n)f'(\xi_n)(c - x_n)}{(f(b) - f(c)) + (f(c) - f(x_n))} \quad (\text{мы}$$

добавили в числитель дроби $f(c) = 0$, а затем применили к функции $f(x)$ теорему Лагранжа на отрезке $[x_n, c]$. Здесь $\xi_n \in (x_n, c)$). Рассмотрим теперь отдельно знаменатель последней дроби. Применив теорему Лагранжа к каждой из двух скобок в этом выражении, получим $(f(b) - f(c)) + (f(c) - f(x_n)) = f'(\xi_n^*)(b - c) + f'(\xi_n)(c - x_n)$, где $x_n < \xi_n < c < \xi_n^* < b$. Так как $f'(x) > 0$ и не убывает на отрезке $[a, b]$, то

$$f'(\xi_n^*) \geq f'(\xi_n) > 0 \text{ и окончательно получаем: } x_{n+1} \leq x_n + \frac{(b - x_n)f'(\xi_n)(c - x_n)}{f'(\xi_n)(b - c) + f'(\xi_n)(c - x_n)} = c,$$

то есть из того, что $x_n < c$, следует, что $x_{n+1} \leq c$.

Покажем, что $a \leq x_{n+1}$. Поскольку $x_n < c$ и функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$, то $f(x_n) < f(c) = 0 < f(b)$. Значит, $x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} > x_n \geq a$. Мы показали, что последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом c . Это означает, что она имеет предел (причем этот предел принадлежит отрезку $[a, c]$, так как все элементы последовательности лежат на этом отрезке). Согласно лемме 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, где c - корень уравнения $f(x) = 0$. Теорема доказана.

Геометрический смысл метода хорд: Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в декартовой системе координат. Уравнение хорды, соединяющей точки с координатами $(x_n, f(x_n))$ и $(b, f(b))$, имеет вид: $\frac{x - x_n}{b - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$. Найдем точку пересечения этой

хорды с осью Ox : если $y = 0$, то $x = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} = x_{n+1}$. Значит, элемент итерационной последовательности с номером $n+1$ представляет собой абсциссу точки пересечения хорды, соединяющей точки $(x_n, f(x_n))$ и $(b, f(b))$, с осью Ox .

Замечание. Случай б) ($f'(x) < 0$ и не возрастает) рассматривается аналогично; в случаях в) и г) надо положить $x_0 = b$, $F(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)(a - x)}{f(a) - f(x)}, & a < x \leq b \\ a - \frac{f(a)}{f'(a)}, & x = a \end{cases}$.

Метод касательных (метод Ньютона).

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет следующим условиям: $f(a) \cdot f(b) < 0$; $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$; производная $f'(x)$ монотонна и не меняет знак на $[a, b]$ (то есть: а) $f'(x) > 0$ и не убывает; б) $f'(x) < 0$ и не возрастает; в) $f'(x) > 0$ и не возрастает; г) $f'(x) < 0$ и не убывает. Будем для

определенности рассматривать сначала случай а). Тогда $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $a \leq x \leq b$. Тогда функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и уравнение (9.1) эквивалентно на отрезке $[a, b]$ уравнению (9.2). Построим по функции $F(x)$ итерационную последовательность: $x_0 = b$, $x_n = F(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что эта последовательность сходится к корню уравнения (9.2).

Теорема 2. Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, причем $c \in [a, b]$, $f(c) = 0$.

Доказательство. Докажем по индукции, что последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена. Пусть точка $c \in [a, b]$ удовлетворяет условию $f(c) = 0$. Первый элемент последовательности $x_0 = b \in [c, b]$. Пусть $x_n \in [c, b]$. Докажем, что $x_{n+1} \in [c, b]$.

Если $x_n = c$, то $x_{n+1} = F(x_n) = F(c) = c$ (так как $f(c) = 0$). Пусть $c < x_n \leq b$. Тогда $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f'(\xi_n)(x_n - c)}{f'(x_n)}$ (добавили в числитель дроби $f(c) = 0$, а затем применили к функции $f(x)$ теорему Лагранжа на отрезке $[c, x_n]$; точка $\xi_n \in (c, x_n)$). Так как $f'(x) > 0$ и не убывает на отрезке $[a, b]$, то $0 < f'(\xi_n) \leq f'(x_n)$, то есть $0 < \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)} \leq 1$. Окончательно получаем:

$x_{n+1} \geq x_n - (x_n - c) = c$. С другой стороны, поскольку $f(x_n) > 0$, $f'(x_n) > 0$, то $x_{n+1} < x_n$. Мы показали, что последовательность $\{x_n\}$ не возрастает и все ее элементы лежат на отрезке $[c, b]$. Это означает, что она имеет предел, который также принадлежит отрезку $[c, b]$. Согласно лемме 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, где c - корень уравнения $f(x) = 0$. Теорема доказана.

Геометрический смысл метода Ньютона: Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$ имеет вид: $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Если положить $y = 0$, то $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$. Значит, элемент итерационной последовательности с номером $n+1$ представляет собой абсциссу точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$, с осью Ox .

Замечание. Можно получить следующую оценку погрешности, общую для методов хорд и касательных: $f(x_n) = f(x_n) - f(c) = f'(\xi_n)(x_n - c)$, где точка ξ_n лежит между точками c и x_n . Значит, $|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, где $m = \inf_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.